Analiza I - seria 6.

Patryk Hes

1. Zbadać funkcję określoną wzorem $f(x) = \sin x \sin(2x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

I. Dziedzina

Iloczyn dwóch funkcji zadanych na $\mathbb{R}$ też jest funkcją zadaną na $\mathbb{R}$. Dziedziną zatem jest cały zbiór $\mathbb{R}$.

II. Ekstrema i punkty przegięcia

$$f'(x) = \cos x \sin 2x + 2\sin x \cos 2x$$

Wyznaczmy kandydatów na ekstrema lub punkty przegięcia:

$$2\sin x \cos 2x = -\cos x \sin 2x$$

$$2\sin x \cos 2x = -2\cos^2 x \sin x$$

$$(\sin x = 0) \vee \big(\cos 2x = -\cos^2 x\big)$$

$$(\sin x = 0) \vee \big(\cos^2 x - \sin^2 x = -\cos^2 x\big)$$

$$(\sin x = 0) \vee \big(2\cos^2 x = \sin^2 x\big)$$

$$(\sin x = 0) \vee \big(3\cos^2 x = 1\big)$$

$$(\sin x = 0) \vee \left(\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \vee \left(\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Lista kandydatów to:

- $x = k\pi$
- $x = 2k\pi + \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x = 2k\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x = 2k\pi + \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$
- $x = 2k\pi - \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$

co z własności arcus cosinusa sprowadza się do:

- $x = k\pi$
- $x = k\pi + \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x = k\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$

ale najwygodniej przypadki będzie się rozpatrywać w postaci:

- $x = 2k\pi$
- $x = (2k+1)\pi$
- $x = 2k\pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x = (2k+1)\pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x = 2k\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x = (2k+1)\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

Rozważmy teraz drugą pochodną:

$$f''(x) = 4\cos x\cos 2x - 5\sin x\sin 2x$$

- Dla $x = 2k\pi$:

  $$\sin(x) = 0 \quad \cos(x) = 1 \quad \sin(2x) = 0 \quad \cos(2x) = 1$$

  $$f''(x) = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

  czyli $x = 2k\pi$ to minima.

- Dla $x = (2k+1)\pi$:

  $$\sin(x) = 0 \quad \cos(x) = -1 \quad \sin(2x) = 0 \quad \cos(2x) = 1$$

  $$f''(x) = 4 \cdot (-1) \cdot 1 = -4$$

  czyli $x = (2k+1)\pi$ to maksima.

- Dla $x = 2k\pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$:

  $$\sin(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \;\; \cos(x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \;\; \sin(2x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \;\; \cos(2x) = -\frac{1}{3}$$

  $$f''(x) = -\frac{24\sqrt{3}}{9}$$

  czyli $x = 2k\pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ to maksima.

- Dla $x = (2k+1)\pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$:

  $$\sin(x) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \;\; \cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}} \;\; \sin(2x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \;\; \cos(2x) = -\frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \frac{24\sqrt{3}}{9}$$

czyli $x = (2k+1)\pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ to minima.

- Dla $x = 2k\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$\sin(x) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sin(2x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\cos(2x) = -\frac{1}{3}$

$$f''(x) = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

czyli $x = 2k\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ to maksima.

- Dla $x = (2k+1)\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$\sin(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sin(2x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\cos(2x) = -\frac{1}{3}$

$$f''(x) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

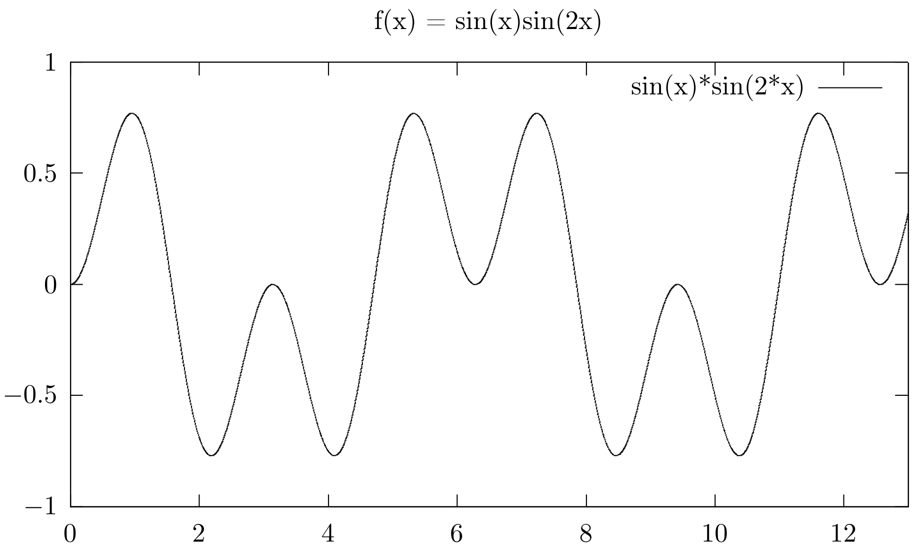
czyli $x = (2k+1)\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ to minima.

III. Asymptoty poziome

$f(x)$ nie posiada asymptot poziomych, ponieważ jest funkcją okresową. Jeśli potrzeba silniejszego argumentu, można to pokazać z definicji Cauchy'ego granicy w nieskończoności (nie może być to granica niewłaściwa, bo $f(x)$ jest ograniczone).

IV. Asymptoty pionowe

$f(x)$ jest iloczynem dwóch funkcji ograniczonych, więc sama też jest ograniczona - nie ma zatem asymptot pionowych.



Rysunek 1: Szkic wykresu

2. Wykazać następującą nierówność dla $x > 0$:

$$\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Rozwiążmy nierówność:

$$\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} < 0$$

Oznaczmy $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}$. Dla $x = 0$ mamy $f(x) = 0$. Zastanówmy się gdzie na przedziale $(0, \infty)$ $f(x)$ ma ekstrema? Może je mieć tam, gdzie $f'(x)$ ma pierwiastki.

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$$

Załóżmy, że istnieje co najmniej jeden taki $x_0 > 0$, że $f'(x_0) = 0$. Zauważmy, że:

$$f'''(x) = -f'(x) - \frac{x^4}{4!}$$

zatem

$$f'''(x_0) = -\frac{x_0^4}{4!} < 0$$

Każdy x_0 to punkt przegięcia $f(x)$, a zarazem maksimum $f'(x)$. Skoro $f'(x)$ dla $x \in (0, \infty)$ osiąga maksymalnie 0, to poza miejscami zerowymi przyjmuje wartości ujemne. To oznacza, że $f(x)$ jest malejąca na całym przedziale $(0, \infty)$.